ЛЕКЦИЯ-7
БІРНЕШЕ АЙНЫМАЛЫ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЕСЕПТЕУІ

§1. Бірнеше айнымалы функциялар ұғымы, олардың шегі және үзіліссіздігі

Бірінші бөлімде бір айнымалы функцияларды қарастырдық. Алайда табиғи құбылыстарда бірнеше айнымалылар арасындағы байланыстарды қарастырып, олардың біреуін қалған басқа айнымалылар арқылы анықтау керек болады. Мысалы, газдың көлемі температура тұрақты болмағанда қысым мен температурадан тәуелді болатыны белгілі, демек, екі айнымалы функция болады. Осы сияқты қабырғалары x пен y болатын тіктөртбұрыштың ауданы екі айнымалыдан тәуелді, қабырғалы x, y, z болатын тіктөртбұрышты параллелепипедтің көлемі үш айнымалыдан тәуелді функция т.с.с. көптеген мысалдар келтіруге болады. Осындай тәуелділіктерді зерттеу үшін бірнеше айнымалы функциялар ұғымын енгізіп, оларды зерттеуді қарастырамыз. Бірнеше айнымалы функцияларды қарастырғанда геометриялық терминдерді қолдану ыңғайлы.

Арифметикалық n өлшемді координаталық кеңістік деп барлық реттелген n нақты сандар $(x_1, x_2, ..., x_n)$ жиынтығын атайды, оны A^n белгілейді. Әрбір реттелген $(x_1, x_2, ..., x_n)$ санды өлшемді координаталық кеңістіктің нүктесі деп атап, оны бір M немесе x әріпімен белгілейді, оны $M \equiv M(x_1, x_2, ..., x_n)$ немесе $x \equiv x(x_1, x_2, ..., x_n)$ жазады, ал нүктелер жиынын $\{M\}$ немесе $\{x\}$ белгілейді.

Анықтама. A^n координаталық кеңістікті n өлшемді евклид кеңістігі деп атайды, егер оның кез келген $M'\left(x_1', x_2', ..., x_n'\right)$ және $M''\left(x_1'', x_2'', ..., x_n''\right)$ екі нүктесі үшін арақашықтық анықталса

$$\rho(M', M'') = \sqrt{\left(x_1'' - x_1'\right)^2 + \left(x_2'' - x_2'\right)^2 + ... + \left(x_n'' - x_n'\right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i'' - x_i'\right)^2}.$$

Оны R^n немесе E^n белгілейді.

$n = 2$ болғанда R^2 евклид жазықтығында $M'(x', y')$ пен $M''(x'', y'')$ нүктелерінің арақашықтығы

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2}$$

анықталатыны белгілі.

Осы сияқты $n = 3$ болғанда R^3 евклид кеңістігінде $M'(x', y', z')$ және $M''(x'', y'', z'')$ нүктелерінің арақашықтығы

$$\rho(M', M'') = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2}$$

анықталады.

R^n кеңістігінде кейбір жиын түрлерінің ұғымдарын қарастырайық.

Айталық R^n кеңістігінде $\{M\}$ нүктелер жиыны және $M(x_1, x_2 ...., x_n)$, $M^0\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right)$ осы жиын нүктелері болсын.

1. Радиусы R центрі M^0 нүктесіндегі n өлшемді тұйық шар немесе шар деп

$$\rho(M, M^0) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - x_i^0\right)^2} \le R$$

теңсіздігін қанағаттандыратын $\{M\}$ нүктелер жиынын атайды.

2. n өлшемді радиусы R центрі M^0 нүктесіндегі ашық шар деп $\rho(M, M^0) < R$ теңсіздігін қанағаттандыратын $\{M\}$ нүктелер жиынын атайды.
3. n өлшемді радиусы R центрі M^0 нүктесіндегі сфера $\rho(M, M^0) = R$ теңдігін қанағаттандыратын $\{M\}$ нүктелер жиынын атайды.

Дербес жағдайда, $n = 2$ болғанда R^2 евклид жазықтығында

$$\left(x-x^0\right)^2+\left(y-y^0\right)^2 \le R^2$$

центрі $\left(x^0, y^0\right)$ нүктесіндегі радиусы R тұйық дөңгелек;

$$\left(x-x^0\right)^2+\left(y-y^0\right)^2 < R^2$$

центрі $\left(x^0, y^0\right)$ нүктесіндегі радиусы R ашық дөңгелек;

$$\left(x-x^0\right)^2+\left(y-y^0\right)^2 = R^2$$

бұл центрі $\left(x^0, y^0\right)$ нүктесіндегі радиусы R шеңбер болады.

Егер $n=3$ болса, R^3 евклид кеңістігінде

$\rho\left(M, M^0\right) \le R^2$ - тұйық шар;

$\rho\left(M, M^0\right) < R^2$ - ашық шар;

$\rho\left(M, M^0\right) = R^2$ - сфера болады.

4. Радиусы $\varepsilon > 0$ центрі M^0 нүктесіндегі ашық шарды осы нүктенің ε аймағы немесе маңайы деп атайды.
5. Координаттары $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ болатын $\{M\}$ жиынындағы төмендегі теңсіздіктерді қанағаттандыратын

$\left|x_1-x_1{}^0\right|<d_1, \left|x_2-x_2{}^0\right|<d_2, ..., \left\|x_n-x_n{}^0\right\|<d_n$, мұндағы $d_1, d_2, ..., d_n$ оң сандар, барлық M нүктелер жиынын центрі $M_0\left(x_1{}^0, x_2{}^0, ..., x_n{}^0\right)$ нүктесіндегі ашық n өлшемді параллелипед немесе M_0 нүктесінің тікбұрышты аймағы деп атайды.

M_0 нүктесінің кез келген ε- аймағында оның қайсыбір тікбұрышты аймағы жатады және керісінше.

6. Егер M^0 нүктесі ε аймағымен бірге $\{M\}$ жиынында жатса, оны жиынның ішкі нүктесі деп атайды.
7. Егер жиынның кез келген нүктесі ішкі нүктесі болса, оны ашық жиын деп атайды.
8. Егер M^0 нүктесінің ε аймағында $\{M\}$ жиынында жататын да, жатпайтын да нүктелер бар болса, оны шекаралық нүкте деп атайды.

Шекаралық нүкте жиында жатуы да, жатпауы да мүмкін. Шекаралық нүктелер жиынын оның шекарасы деп атайды.

9. Егер жиынның барлық шекаралық нүктелері жиында жатса, оны тұйық жиын деп атайды.
10. R^n кеңістігіндегі $\{M\}$ жиынының барлық нүктелері жататын қайсы бір n өлшемді шар табылса, оны шектелген жиын деп атайды.
11. Егер жиынның кез келген екі нүктесін бүтіндей осы жиында жатқан үзіліссіз қисықпен қосу мүмкін болса, оны бірбайланысты жиын деп атайды.
12. Ашық, бірбайланысты жиынды облыс деп атайды.

Егер R^n кеңістігіндегі $\{M\}$ жиынының әрбір M нүктесіне белгілі ереже немесе заң бойынша u саны сәйкестендірілсе, онда $\{M\}$ жиынында $u=u(M)$немесе $u=f(M)$ функциясы анықталған деп атайды, $\{M\}$ жиынын функцияның анықталу облысы деп атайды.

Берілген M нүктесіне сәйкес келетін u санын функцияның дербес мәні деп атайды. Дәрбес мәндер жиынтығын функцияның мәндер жиыны деп атайды. M нүктесінің координиталары $x_1, x_2, ..., x_n$ сандары болғандықтан $u=f(M)$ функциясын $u=f\left(x_1, x_2, ...x_n\right)$ да белгілейді.

Сонымен, $u=u\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ немесе $u=f\left(x_1, x_2, ...x_n\right)$ функциясы R^n евклид кеңістігінде n айнымалыдан тәуелді функция, мұндағы $x_1, x_2, ..., x_n$ тәуелсіз айнымалылар немесе аргументтер болады.

Тәуелсіз айнымалылар саны $n>1$, болғанда функцияларды бірнеше немесе көп айнымалыдан тәуелді деп атайды.

$u=f(x_1,x_2,....x_n)$ функциясының $f(x_1,x_2,....x_n)=C$, мұндағы $C-const$, тұрақты мән қабылдайтын нүктелер жиынын деңгейлік бет деп атайды. Әдетте $n=2$ болғанда R^2 евклид жазықтығында екі айнымалыдан тәуелді функцияларды $z=f(x,y)$, немесе $z=z(x,y)$, немесе $z=g(x,y)$ т.с.с белгілейді, мұндағы x,y тәуелсіз айнымалылар немесе аргументтер.

Осы сияқты $n=3$ болғанда R^3евклид кеңісітігінде үш айнымалы функцияларды $u=u(x,y,z)$ немесе $u=f(x,y,z)$т.с.с белгілейді, мұндағы x,y,z аргументтер.

Екі айнымалы $z=f(x,y)$ функциясының $f(x,y)=C,\ C=const$, нүктелер жиынын деңгейлік сызық деп, осы сияқты $u=f(x,y,z)$ функциясының $f(x,y,z)=C,\ C=const$, нүктелер жиынын деңгейлік бет деп атайды.

§2. Бірнеше айнымалы функциялардың шегі мен үзіліссіздігі

n өлшемді R^n евклид кеңістігінде нүктелер тізбегі ұғымын енгізейік. Айталық $1,2,....,k,.....$ натурал сандар тізбегінен алынған әрбір k санына R^n евклид кеңістігінен M_k нүктесі сәйкес келсін. Осы ретпен алынған $M_1,M_2,....,M_k,....$ нүктелер қатарын R^n кеңістігінде нүктелер тізбегі деп атайды, оны $\{M_k\}$ деп белгілейді.

R^n кеңістігіндегі нүктелер тізбегіне жинақтылық ұғымын қарастырайық.

Анықтама. Егер $A\in R^n$ нүктесі үшін $\forall\varepsilon>0$ санына сәйкес N нөмірі табылып, барлық $k\geq N$ мәндерінде $\rho(M_k,A)<\varepsilon$ теңсіздігі орындалса, $\{M_k\}$ нүктелер тізбегі R^n евклид кеңістігінде A нүктесіне жинақты деп, ал A санын $\{M_k\}$ тізбегінің шегі деп атайды, оны $\lim\limits_{n\to\infty}M_k=A$ немесе $k\to\infty$ да $M_k\to\infty$ белгілейді.

Лемма. n өлшемді евклид кеңістігіндегі $\{M_k\}$ нүктелер тізбегі осы кеңістіктегі $A(a_1,a_2,...,a_n)$ нүктесіне жинақты болу үшін M_k нүктесінің координаталары $\{x_1^{(k)},x_2^{(k)},....,x_n^{(k)}\}$ сәйкес A нүктесінің координаталарына жинақты болуы қажетті және жеткілікті.